

## ПОСТРОЕНИЕ ДИСПЕРСИОННЫХ КРИВЫХ ДЛЯ РАДИАЛЬНО-СЛОИСТОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

Н.К.АХМЕДОВ

*Бакинский Государственный Университет*

*В работе проведен численный анализ построения дисперсионных кривых для радиально-слоистых цилиндрических волноводов. Исследовано поведение вещественной части дисперсионных кривых, соответствующих однородным волнам, распространяющимся вдоль оси цилиндра.*

1. Рассмотрим распространение стационарных осесимметричных упругих волн в радиально-слоистом цилиндрическом волноводе, состоящем из чередующихся жестких и мягких слоев числом  $n=2h-1$ . Будем предполагать, что внешние слои – жесткие. Каждый жесткий слой снабдим нечетным номером  $j=1, 3, \dots, n$ , а мягкий – четным  $i=2, 4, \dots, n-1$  (порядок нумерации от центра цилиндра). Для простоты примем, что упругие свойства всех жестких и всех мягких слоев одинаковы: модули сдвига  $G_j = G_g$ ,  $G_i = G_e$ , коэффициенты Пуассона  $\nu_j = \nu_g$ ,  $\nu_i = \nu_e$  и плотности  $m_j = m_g$ ,  $m_i = m_e$ .

За относительную характеристику жесткости примем малый параметр  $p = G_e / G_g$ .

Цилиндрический волновод отнесем к цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ . Внутренний радиус  $k$ -го слоя обозначим  $r_{0k}$ , внешний -  $r_{1k}$ .

Уравнения движения  $k$ -го слоя в цилиндрической системе координат имеют вид [1]:

$$\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}^{(k)}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_{\rho\xi}^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{\sigma_{\rho\rho}^{(k)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}}{\rho} = m_k \frac{\partial^2 u_{\rho}^{(k)}}{\partial \tau^2},$$

$$\frac{\partial \sigma_{\rho\xi}^{(k)}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_{\xi\xi}^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{\sigma_{\rho\xi}^{(k)}}{\rho} = m_k \frac{\partial^2 u_{\xi}^{(k)}}{\partial \tau^2},$$
(1.1)

где  $\rho = \frac{r}{r_{1n}}, \xi = \frac{z}{r_{1n}}$  - новые безразмерные координаты,  $\tau = \frac{t}{r_{1n}} \sqrt{\frac{G_0}{m_0}}$  - без-

размерное время;  $u_\rho^{(k)} = u_\rho^{(k)}(\rho, \xi, \tau), u_\xi^{(k)} = u_\xi^{(k)}(\rho, \tau, \xi)$  - компоненты вектора смещений  $k$ -го слоя;  $\sigma_{\rho\rho}^{(k)}, \sigma_{\rho\xi}^{(k)}, \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}, \sigma_{\xi\xi}^{(k)}$  - компоненты тензора напряжений  $k$ -го слоя;

$$u_\rho^{(k)} = \frac{u_r^{(k)}}{r_{1n}}, u_\xi^{(k)} = \frac{u_z^{(k)}}{r_{1n}}, \sigma_{\rho\rho}^{(k)} = \frac{\sigma_{rr}^{(k)}}{G_0}, \sigma_{\rho\xi}^{(k)} = \frac{\sigma_{rz}^{(k)}}{G_0}, \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} = \frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}}{G_0}, \sigma_{\xi\xi}^{(k)} = \frac{\sigma_{zz}^{(k)}}{G_0},$$

$G_k = \frac{G_k}{G_0}, m_k = \frac{m_k}{m_0}$  ( $k = \overline{1, n}$ ) - безразмерные величины;  $G_0$  и  $m_0$  - некоторые характерные параметры, имеющие размерности модулей сдвига и плотности.

Компоненты тензора напряжений  $k$ -го слоя  $\sigma_{\rho\rho}^{(k)}, \sigma_{\rho\xi}^{(k)}, \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}, \sigma_{\xi\xi}^{(k)}$  выражаются через компоненты вектора перемещений следующим образом [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(k)} &= \frac{2G_k}{1-2\nu_k} \left[ (1-\nu_k) \frac{\partial u_\rho^{(k)}}{\partial \rho} + \nu_k \left( \frac{u_\rho^{(k)}}{\rho} + \frac{\partial u_\xi^{(k)}}{\partial \xi} \right) \right], \\ \sigma_{\xi\xi}^{(k)} &= \frac{2G_k}{1-2\nu_k} \left[ (1-\nu_k) \frac{\partial u_\xi^{(k)}}{\partial \xi} + \nu_k \left( \frac{\partial u_\rho^{(k)}}{\partial \rho} + \frac{u_\rho^{(k)}}{\rho} \right) \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} &= \frac{2G_k}{1-2\nu_k} \left[ (1-\nu_k) \frac{u_\rho^{(k)}}{\rho} + \nu_k \left( \frac{\partial u_\rho^{(k)}}{\partial \rho} + \frac{\partial u_\xi^{(k)}}{\partial \xi} \right) \right], \\ \sigma_{\rho\xi}^{(k)} &= G_k \left( \frac{\partial u_\rho^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_\xi^{(k)}}{\partial \rho} \right). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Соединение слоев будем считать жестким, что означает выполнение следующих условий сопряжения:

$$\begin{cases} \sigma_{\rho\rho}^{(s)}(\rho_{1s}, \xi, \tau) = \sigma_{\rho\rho}^{(s+1)}(\rho_{0s+1}, \xi, \tau), \\ \sigma_{\rho\xi}^{(s)}(\rho_{1s}, \xi, \tau) = \sigma_{\rho\xi}^{(s+1)}(\rho_{0s+1}, \xi, \tau), \\ u_\rho^{(s)}(\rho_{1s}, \xi, \tau) = u_\rho^{(s+1)}(\rho_{0s+1}, \xi, \tau), \\ u_\xi^{(s)}(\rho_{1s}, \xi, \tau) = u_\xi^{(s+1)}(\rho_{0s+1}, \xi, \tau), \end{cases} \quad (1.3)$$

где  $s = \overline{1, n-1}$ .

Предполагаем, что боковая поверхность цилиндрического волновода свободна от напряжений, т.е.

$$\begin{cases} \sigma_{\rho\rho}^{(1)}(\rho_{01}, \xi, \tau) = \sigma_{\rho\xi}^{(1)}(\rho_{01}, \xi, \tau) = 0, \\ \sigma_{\rho\rho}^{(n)}(1, \xi, \tau) = \sigma_{\rho\xi}^{(n)}(1, \xi, \tau) = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

**2. Исследование распространения упругих волн в многослойных средах** связано с изучением корней дисперсионного уравнения. Для многослойных сред исследование корней дисперсионного уравнения является сложной задачей. Высокий порядок определителя и громоздкость его элементов затрудняют нахождение дисперсионного множества. Например, в случае трехслойного полого цилиндра дисперсионное соотношение представляет собой определитель 12-го порядка. В связи с этим для решения указанных классов задач целесообразно использовать сочетание аналитических и численных методов [2-4]. Для многослойных волноводов с целью численного анализа используется весьма эффективный численный метод, метод дискретной ортогонализации Годунова [5].

Для численного анализа задачи (1.1), (1.3), (1.4), выбирая в качестве компонент разрешающего вектора величины  $\sigma_{\rho\rho}^{(k)}$ ,  $\sigma_{\rho\xi}^{(k)}$ ,  $u_{\rho}^{(k)}$ ,  $u_{\xi}^{(k)}$ , из (1.1), (1.2) получаем четыре дифференциальных уравнения в частных производных:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\rho\rho}^{(k)}}{\partial \rho} &= \frac{2\nu_k - 1}{(1 - \nu_k)\rho} \sigma_{\rho\rho}^{(k)} - \frac{\partial \sigma_{\rho\xi}^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{2G_k}{(1 - \nu_k)\rho^2} u_{\rho}^{(k)} + \frac{2G_k \nu_k}{(1 - \nu_k)\rho} \frac{\partial u_{\xi}^{(k)}}{\partial \xi} + m_k \frac{\partial^2 u_{\rho}^{(k)}}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{\rho\xi}^{(k)}}{\partial \rho} &= \frac{\nu_k}{\nu_k - 1} \cdot \frac{\partial \sigma_{\rho\rho}^{(k)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho} \sigma_{\rho\xi}^{(k)} + \frac{2G_k \nu_k}{(\nu_k - 1)\rho} \cdot \frac{\partial u_{\rho}^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{2G_k}{\nu_k - 1} \frac{\partial^2 u_{\xi}^{(k)}}{\partial \xi^2} + m_k \frac{\partial^2 u_{\xi}^{(k)}}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\partial u_{\rho}^{(k)}}{\partial \rho} &= \frac{1 - 2\nu_k}{2(1 - \nu_k)G_k} \sigma_{\rho\rho}^{(k)} + \frac{\nu_k}{(\nu_k - 1)\rho} u_{\rho}^{(k)} + \frac{\nu_k}{\nu_k - 1} \frac{\partial u_{\xi}^{(k)}}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial u_{\xi}^{(k)}}{\partial \rho} &= \frac{1}{G_k} \sigma_{\rho\xi}^{(k)} - \frac{\partial u_{\rho}^{(k)}}{\partial \xi}. \end{aligned} \right. \quad (2.1)$$

Решение (2.1), (1.3), (1.4) ищем в виде

$$\left(\sigma_{\rho\rho}^{(k)}, \sigma_{\rho\xi}^{(k)}, u_{\rho}^{(k)}, u_{\xi}^{(k)}\right) = \left(\tilde{\sigma}_{\rho\rho}^{(k)}(\rho), \tilde{\sigma}_{\rho\xi}^{(k)}(\rho), \tilde{u}_{\rho}^{(k)}(\rho), \tilde{u}_{\xi}^{(k)}(\rho)\right) e^{i(\alpha\xi - \Omega\tau)}, \quad (2.2)$$

здесь  $\Omega$  - частота колебаний.

Подставляя (2.2) в (2.1), (1.3), (1.4) имеем:

$$\frac{dy_k}{d\rho} = A_k(\rho, \Omega, \alpha) \bar{y}_k, \quad (2.3)$$

$$C \bar{y}_1(\rho_{01}) = \bar{0}, \quad (2.4.)$$

$$\bar{y}_s(\rho_{1s}) = \bar{y}_{s+1}(\rho_{0s+1}), \quad (2.5)$$

$$C \bar{y}_n(1) = \bar{0}, \quad (2.6)$$

где  $\bar{y}_k(\rho) = \left(\tilde{\sigma}_{\rho\rho}^{(k)}(\rho), \tilde{\sigma}_{\rho\xi}^{(k)}(\rho), \tilde{u}_{\rho}^{(k)}(\rho), \tilde{u}_{\xi}^{(k)}(\rho)\right)^T$  - искомая вектор-функция;

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_k(\rho, \Omega, \alpha) = \begin{pmatrix} \frac{2\nu_k - 1}{(1 - \nu_k)\rho} & -i\alpha & \frac{2G_k}{(1 - \nu_k)\rho^2} - m_k\Omega^2 & \frac{2G_k\nu_k}{(1 - \nu_k)\rho} i\alpha \\ \frac{\nu_k}{\nu_k - 1} i\alpha & -\frac{1}{\rho} & \frac{2G_k\nu_k}{(\nu_k - 1)\rho} i\alpha & \frac{2G_k}{1 - \nu_k} \alpha^2 - \Omega^2 m_k \\ \frac{1 - 2\nu_k}{2(1 - \nu_k)G_k} & 0 & \frac{\nu_k}{(\nu_k - 1)\rho} & \frac{\nu_k}{\nu_k - 1} i\alpha \\ 0 & \frac{1}{G_k} & -i\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

$$k = \overline{1, n}; \quad s = \overline{1, n-1}.$$

Определение волновой картины в радиально-слоистом цилиндрическом волноводе связано с построением дисперсионных кривых  $\alpha_i = \alpha_i(\Omega)$ , определяемых спектральным множеством (2.3)-(2.6).

Численно решая краевую задачу (2.3)-(2.6), получаем дисперсионные зависимости  $\alpha_i = \alpha_i(\Omega)$  и соответствующие собственные функции, описывающие распределение смещений и напряжений по радиусу.

**3.** Проведем краткое описание метода дискретной ортогонализации для (2.3)-(2.6).

Выберем систему линейно независимых векторов

$$\overline{y}_{11}^{(0)} = (1, 0, 0, 0)^T, \quad \overline{y}_{12}^{(0)} = (0, 1, 0, 0)^T, \quad (3.1)$$

каждый из которых удовлетворял бы граничным условиям (2.4). Представим общее решение (2.3) в начальной точке в виде

$$\overline{y}_1(\rho_{01}) = \sum_{t=1}^2 \beta_t^{(1,1)} \overline{y}_{1t}^{(0)}. \quad (3.2)$$

Это решение удовлетворяет условиям (2.4) независимо от произвольных постоянных  $\beta_t^{(1,1)}$ . Разобьем толщину каждого  $k$ -го слоя определенной системой точек (точки ортогонализации):

$$\rho_{0k} = \rho_0^{(k)} < \rho_1^{(k)} < \rho_2^{(k)} < \dots < \rho_{\ell_k}^{(k)} = \rho_{1k} \quad (k = \overline{1; n}).$$

Рассмотрим сначала отрезок  $[\rho_0^{(1)}, \rho_1^{(1)}]$ , принадлежащий первому слою.

Представим теперь решение (2.3) в точке  $\rho_1^{(1)}$  в виде

$$\overline{y}_1(\rho_1^{(1)}) = \sum_{t=1}^2 \beta_t^{(1,1)} \overline{y}_{1t}(\rho_1^{(1)}),$$

где  $\overline{y}_{1t}(\rho_1^{(1)})$  - результат численного интегрирования

$$\frac{d\overline{y}_{1t}}{d\rho} = A_1(\rho, \Omega, \alpha) \overline{y}_{1t} \quad (3.3)$$

с начальными условиями

$$\overline{y}_{1t}(\rho_{01}) = \overline{y}_{1t}^{(0)} \quad (t = 1, 2). \quad (3.4)$$

Проортономмируем векторы  $\overline{y}_{11}(\rho_1^{(1)})$ ,  $\overline{y}_{12}(\rho_1^{(1)})$  по формулам [5]:

$$d_{11}^{(1,1)} = \sqrt{(\overline{y}_{11}(\rho_1^{(1)}), \overline{y}_{11}(\rho_1^{(1)}))}, \quad \overline{z}_{11}(\rho_1^{(1)}) = \frac{1}{d_{11}^{(1,1)}} \overline{y}_{11}(\rho_1^{(1)}),$$

$$d_{21}^{(1,1)} = (\overline{y}_{12}(\rho_1^{(1)}), \overline{z}_{11}(\rho_1^{(1)})), \quad d_{22}^{(1,1)} = \sqrt{(\overline{y}_{12}(\rho_1^{(1)}), \overline{y}_{12}(\rho_1^{(1)})) - (d_{21}^{(1,1)})^2},$$

$$\overline{z}_{12}(\rho_1^{(1)}) = \frac{1}{d_{22}^{(1,1)}} \left[ \overline{y}_{12}(\rho_1^{(1)}) - d_{21}^{(1,1)} \cdot \overline{z}_{11}(\rho_1^{(1)}) \right].$$

В результате ортонормирования получаем систему векторов  $\overline{z}_{11}(\rho_1^{(1)})$ ,  $\overline{z}_{12}(\rho_1^{(1)})$  и некоторую треугольную матрицу

$$D^{(1,1)} = \begin{pmatrix} d_{11}^{(1,1)} & d_{21}^{(1,1)} \\ 0 & d_{22}^{(1,1)} \end{pmatrix}.$$

На отрезке  $[\rho_1^{(1)}, \rho_2^{(1)}]$  интегрируем численно систему (3.3) с начальными условиями

$$\overline{y}_{1t}(\rho_1^{(1)}) = \overline{z}_{1t}(\rho_1^{(1)}).$$

Представим решение (2.3) в точке  $\rho_2^{(1)}$  в виде

$$\overline{y}_1(\rho_2^{(1)}) = \sum_{t=1}^2 \beta_t^{(1,2)} \overline{y}_{1t}(\rho_2^{(1)}).$$

Получив решения  $\overline{y}_{11}(\rho_2^{(1)})$ ,  $\overline{y}_{12}(\rho_2^{(1)})$ , ортонормируем найденные векторы:

$$d_{11}^{(1,2)} = \sqrt{(\overline{y}_{11}(\rho_2^{(1)}), \overline{y}_{11}(\rho_2^{(1)}))}, \quad \overline{z}_{11}(\rho_2^{(1)}) = \frac{1}{d_{11}^{(1,2)}} \overline{y}_{11}(\rho_2^{(1)}),$$

$$d_{21}^{(1,1)} = (\overline{y}_{12}(\rho_2^{(1)}), \overline{z}_{11}(\rho_2^{(1)})), \quad d_{22}^{(1,1)} = \sqrt{(\overline{y}_{12}(\rho_2^{(1)}), \overline{y}_{12}(\rho_2^{(1)})) - (d_{21}^{(1,1)})^2},$$

$$\overline{z}_{12}(\rho_2^{(1)}) = \frac{1}{d_{22}^{(1,1)}} \left[ \overline{y}_{12}(\rho_2^{(1)}) - d_{21}^{(1,1)} \cdot \overline{z}_{11}(\rho_2^{(1)}) \right].$$

В итоге, получаем некоторую треугольную матрицу

$$D^{(1,2)} = \begin{pmatrix} d_{11}^{(1,2)} & d_{21}^{(1,2)} \\ 0 & d_{22}^{(1,2)} \end{pmatrix}$$

и систему векторов  $\overline{z}_{11}(\rho_2^{(1)})$ ,  $\overline{z}_{12}(\rho_2^{(1)})$ .

Используем их в качестве начальных условий для интегрирования (3.3) на отрезке  $[\rho_2^{(1)}, \rho_3^{(1)}]$  и т.д.

Полученную в конечной точке первого слоя  $\rho_{\ell_1}^{(1)}$  систему ортонормированных векторов  $\overline{z}_{11}(\rho_{\ell_1}^{(1)})$ ,  $\overline{z}_{12}(\rho_{\ell_1}^{(1)})$  на основе (2.5) принимаем в качестве начальных данных при интегрировании на втором слое, т.е. на отрезке  $[\rho_0^{(2)}, \rho_1^{(2)}]$ . При переходе от слоя к слою будут меняться матрицы  $A_k(\rho, \Omega, \alpha)$  ( $k=\overline{1, n}$ ). Процесс заканчивается по достижении точки  $\rho_{1n} = \rho_{\ell_n}^{(n)} = 1$ . В результате получаем, с использованием граничных условий (2.6) в точке  $\rho_{1n} = 1$ , систему алгебраических уравнений

$$\sum_{t=1}^2 a_{qt}(\alpha, \Omega) \beta_t^{(n, \ell_n)} = 0 \quad (q=1, 2). \quad (3.5)$$

Для существования нетривиального решения (2.3) – (2.6), необходимо и достаточно, чтобы определитель системы (3.5) был равен нулю:

$$\Delta(\alpha, \Omega) = |a_{qt}(\alpha, \Omega)| = 0. \quad (3.6)$$

Полученное уравнение является дисперсионным соотношением для исходной краевой задачи.

Для решения нелинейного уравнения (3.6) можно использовать различные методы последовательных приближений, в частности метод Ньютона или метод хорд [6]. Необходимо учитывать, что зависимость  $\Delta(\alpha, \Omega)$  может иметь самый произвольный вид и указанные методы могут оказаться неэффективными, если неудачно выбрано начальное приближение  $\alpha_0$  при вполне определенном  $\Omega$ .

В этом случае для определения вещественных и чисто мнимых  $\alpha$  целесообразно использовать шаговый метод (метод половинного деления), а для определения комплексных  $\alpha$  - метод принципа аргумента [7].

Выбирая шаг по  $\alpha$  достаточно мелким можно определить расположение вещественных и чисто мнимых корней  $\alpha$  по смене знака  $\Delta(\alpha, \Omega)$ . Для комплексных  $\alpha$  корень определяется по числу оборотов, которые замечают вокруг начала координат радиус-вектор комплекснозначной функции  $\Delta(\alpha, \Omega)$  при обходе некоторого замкнутого контура в комплексной области. Когда  $\alpha$  описывает некоторую простую замкнутую кривую  $M$  и  $\Delta(\alpha, \Omega)$  один раз обходит начало координат, тогда  $\Delta(\alpha, \Omega)$  имеет ровно один нуль внутри области, которую ограничивает  $M$ . Дальнейшее уточнение корня может производиться любым из методов последовательных приближений, например, методом наискорейшего спуска [6].

Для найденного значения корня  $\alpha = \alpha_*$  можно построить решение

задачи в точках ортогонализации. Положив  $\beta_2^{(n, \ell_n)} = 1$ , определяем  $\beta_1^{(n, \ell_n)}$ . Решение исходной краевой задачи в точках ортогонализации может быть построено по формуле

$$\overline{y_k}(\rho_m^{(k)}) = \sum_{t=1}^2 \beta_t^{(k, m)} \overline{z_{kt}^{(m)}}(\alpha_*, \rho_m^{(k)}),$$

$$m = \overline{1; \ell_k}; \quad k = \overline{1, n}.$$

Отметим, что  $\beta_t^{(k, q)}$  определяется в процессе обратной прогонки по формулам

$$D^{(k, q+1)} \overline{\beta}^{(k, q)} = \overline{\beta}^{(k, q+1)},$$

где  $\overline{\beta}^{(k, q)} = (\beta_1^{(k, q)}, \beta_2^{(k, q)})^T$ ;  $D^{(k, q+1)} = \begin{pmatrix} d_{11}^{(k, q+1)} & d_{21}^{(k, q+1)} \\ 0 & d_{22}^{(k, q+1)} \end{pmatrix}$ ,  $k = \overline{1, n}$ ;  $q = \overline{1; \ell_k - 1}$ .

Проведем численный анализ задачи (2.3)-(2.6) для трехслойного цилиндрического волновода методом дискретной ортогонализации [5].

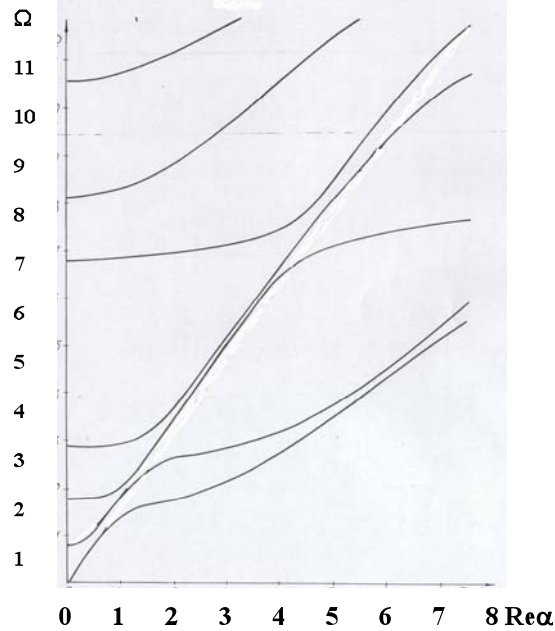


Рис. 1.

На рис.1 построена вещественная часть дисперсионных кривых в случае  $p = 10^{-2}$ ;  $\frac{m_m}{m_{жс}} = 0,2$ ;  $\rho_{01} = 0,2$ ;  $\rho_{11} = 0,5$ ;  $\rho_{03} = 0,6$ ;  $\rho_{13} = 1$ .

Первая дисперсионная ветвь, выходящая из нуля, при возрастании  $\Omega$  от нуля до 1,7 приближается к прямой с тангенсом угла наклона, равным скорости распространения поперечных волн в жестком слое. Начиная с  $\Omega=1,7$ , тангенс угла наклона стремится к фазовой скорости продольных волн в мягком слое. При последующем увеличении  $\alpha$  для первой кривой асимптотой будет прямая с тангенсом угла наклона, равным  $C_R$  - фазовой скорости волн Релея, распространяющихся вдоль свободной поверхности цилиндра.

На второй дисперсионной ветви при росте  $\Omega$  кривая стремится к прямой с тангенсом угла наклона, равным скорости продольных волн в жестком слое. При  $1,5 < \Omega < 2,8$  тангенс угла приближается к фазовым скоростям поперечных волн в жестком слое.

При  $\Omega > 2,8$  с дальнейшим возрастанием  $\Omega$ , тангенс угла наклона стремится к фазовым скоростям продольных волн в мягком слое и т.д. Для кривой асимптотой будет прямая с тангенсом угла наклона, равным  $\sqrt{\frac{G_i}{m_i}}$ .

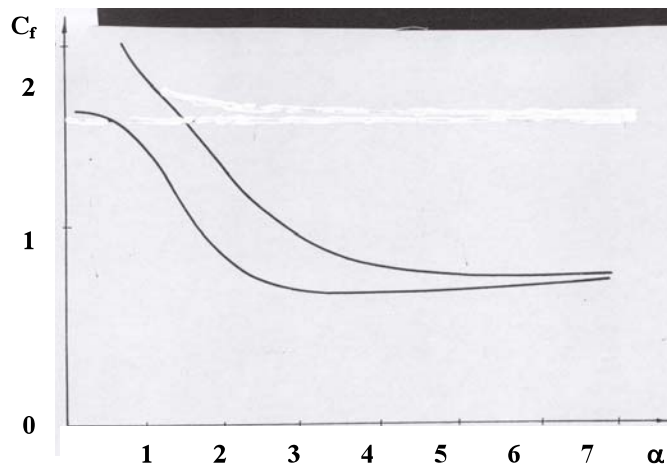


Рис. 2.

На рис.2 изображены зависимости фазовой скорости «с» от  $\alpha$  в случае  $p=10^{-2}$ ,  $\frac{m_i}{m_j}=0,2$ .

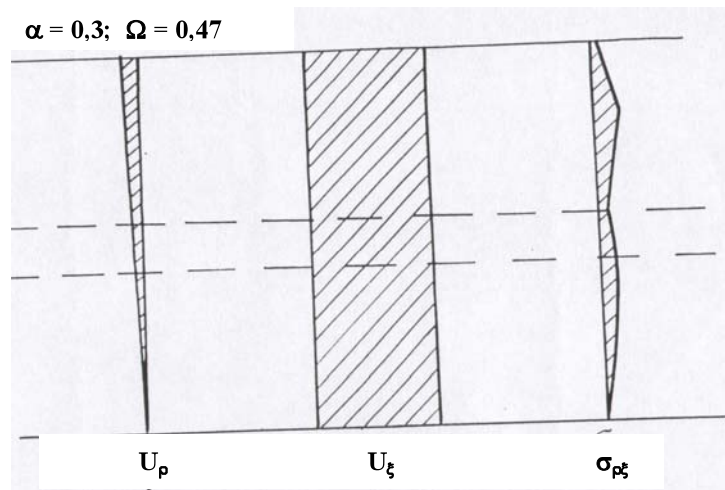


Рис. 3.

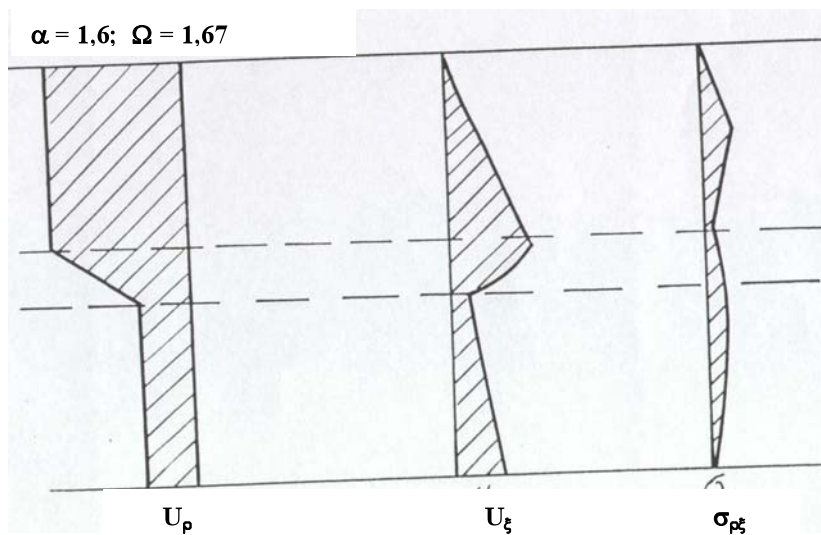


Рис. 4.

На рис. 3, 4 приведено распределение по радиальным направлениям величин  $u_\rho^{(k)}, u_\zeta^{(k)}, \sigma_{\rho\zeta}^{(k)}$  ( $k=1,2,3$ ) для различных  $\Omega$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
2. Гетман И.П., Устинов Ю.А. Распространение волн в поперечно-неоднородных пьезоактивных волноводах. Акустический журнал. 1985, вып.3, т. XXXI, стр. 314-319.

3. Ахмедов Н.К., Устинов Ю.А. Крутильные колебания и волны в слоистом цилиндре. Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1991, №2, стр. 92-98.
4. Ахмедов Н.К. Анализ пограничного слоя в осесимметричной задаче теории упругости для радиально-слоистого цилиндра и распространения осесимметричных волн. Прикладная математика и механика. 1997, т. 61, вып. 5, стр. 863-872.
5. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Успехи матем. наук. 1961, т. 14, вып.3, стр. 171-174.
6. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.2. М., Физматгиз. 1962, 639 с.
7. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980, 280 с.

### **RADIAL ÇOXLAYLI SİLİNDRİK DALĞAÖTÜRÜCÜ ÜÇÜN DİSPERSİYA ƏYRİLƏRİNİN QURULMASI**

**N.Q.ƏHMƏDOV**

#### **XÜLASƏ**

İşdə radial çoxlaylı silindrik dalğaötürücü üçün dispersiya əyri-  
lərinin qurulması məsələsi ədədi tədqiq edilir. Silindrin oxu boyu yayılan  
bircins dalğaya uyğun dispersiya əyriələrinin həqiqi hissəsi öyrənilir.

### **CONSTRUCTION OF DISPERSIVE CURVES FOR RADIALY LAMINATED CYLINDRICAL WAVEGUIDE**

**N.K.AKHMEDOV**

#### **SUMMARY**

Numerical analysis of constructing dispersive curves is carried out for radially  
laminated cylindrical waveguides. Behavior of real part of dispersive curves corre-  
sponding to homogeneous waves propagating along cylinder's axis.